DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2017.02.008

幂级数 J-Armendariz 环*

任艳丽[1]，李敏[2]
（1. 南京晓庄学院信息工程学院，江苏 南京 211171；
2. 南京信息工程大学数学与统计学院，江苏 南京 210044）

摘　要： 引入幂级数 J-Armendariz 环的概念，进一步扩展幂级数 Armendariz 环的研究。证明了：① 设 $T = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ 是一个形式三角矩阵环，则 T 是幂级数 J-Armendariz 环当且仅当 R 和 S 都是是幂级数 J-Armendariz 环；② 设 $\{R_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 是一族环，则直积 $\prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$ 是幂级数 J-Armendariz 环当且仅当每一个环 R_α 都是幂级数 J-Armendariz 环；③ 如果环 R 是幂级数 J-Armendariz 环，满足 $J(R)[x] = J(R[x])$，则 $R[x]$ 是幂级数 J-Armendariz 环。

关键词： 幂级数；幂级数 Armendariz 环；幂级数 J-Armendariz 环；幂级数弱 Armendariz 环
中图分类号： O153.3　**文献标志码：** A　**文章编号：** 0529-6579（2017）02-0048-05

Power series J-Armendariz rings

REN Yanli[1], *LI Min*[2]
（1. School of Information Engineering, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China）

Abstract: By introducing the concept of a power series J-Armendariz ring, the study of power series Armendariz rings is further extended. It is shown that: ① let $T = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ be a formal triangular matrix ring. Then T is a power seriesJ-Armendariz ring if and only if R , S are both power series J-Armendariz rings; ② let $\{R_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ be a family of rings. Then $\prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$ is a power series J-Armendariz ring if and only if every R_α is a power series J-Armendarizring; ③ if R is a power series J-Armendarizring and satisfies $J(R)[x] = J(R[x])$, then $R[x]$ is a power series J-Armendariz ring.

Key words: power series; power series Armendariz ring; power series J-Armendariz ring; weak power series Armendariz ring

本文假定所研究的环 R 都是有单位元 1 的结合环，α 是环 R 的一个非零自同态。我们分别以 $R[x]$ 和 $R[[x]]$ 表示 R 上的多项式环和 R 上的幂级数环，分别以 $\mathrm{nil}(R)$ 和 $J(R)$ 表示环 R 中所有幂零元的集合和 R 的 Jacobsin 根，分别以 $M_N(R)$，$T_n(R)$，I_n，E_{ij} 表示 R 上的 n 阶全矩阵环，n 阶上三角矩阵环，n 阶单位矩阵和第 i 行第 j 列为 1 其余为 0 的 n 阶矩阵。

近年来，关于幂级数环的研究和讨论有很多[1-7]。Kim 等在文献［1］中称一个环 R 为幂级

* **收稿日期：** 2016-08-25
基金项目： 国家自然科学基金（11101217）；江苏省自然科学基金（BK20141476）
作者简介： 任艳丽（1965 年生），女；**研究方向：** 结合环、结合代数；E-mail：renyanlisx@163.com

数 Armendariz 环，如果对任意的幂级数 $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i, g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i\in R[[x]]$，由 $f(x)g(x)=0$ 可以推出 $a_ib_j=0$，对任意的 i 和 j。文献［1］证明了约化环是幂级数 Armendariz 环。将幂级数 Armendariz 环进行推广，Hizem 在文献［2］中称一个环 R 为幂级数弱 Armendariz 环，如果对任意的幂级数

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in R[[x]]$$

由 $f(x)g(x)=0$ 可以推出 $a_ib_j\in \mathrm{nil}(R)$，对一切 i 和 j。幂级数 Armendariz 环是幂级数弱 Armendariz 环，但反之不成立（见文献［2］的 Remark 6）。

1　定义及例子

下面，我们将幂级数 Armendariz 环的概念做另一方面的推广。

定义 1　称一个环 R 是幂级数 J-Armendariz 环，如果对任意的幂级数

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in R[[x]]$$

由 $f(x)g(x)=0$ 可以推出 $a_ib_j=J(R)$，对任意的 i 和 j。

显然幂级数 Armendariz 环是幂级数 J-Armendariz 环。

命题 1　幂级数 J-Armendariz 环的理想子环也是幂级数 J-Armendariz 环。

证明　设 $I\Delta R$，且 $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in I[[x]]\subseteq R[[X]]$，满足 $f(x)g(x)=0$。因为环 R 是幂级数 J-Armendariz 环，所以有 $a_ib_j\in J(R)\cap I=J(I)$，对任意的 i,j。因此，环 I 是幂级数 J-Armendariz 环。

当 $\mathrm{nil}(R)$ 是环 R 的理想（即 R 是 NI 环）时，$\mathrm{nil}(R)=J(R)$（见文献［8］的命题 2.7（2）），幂级数弱 Armendariz 环是幂级数 J-Armendariz 环。下面的例子说明，幂级数 J-Armendariz 环未必是幂级数弱 Armendariz 环。

例 1　设 $F=Z_2$，A 是幂级数环 $F[[t]]$ 上的三阶全矩阵环，

$B=\{M=(m_{ij})\in A\mid m_{ij}\in tF[[t]]$，其中 $i=3$ 或 $j=3$ 时，$m_{ij}=0\}$，

$C=\{M=(m_{ij})\in A\mid m_{ij}\in F; m_{ij}=0, i\neq j\}$

令 R 表示由 B 和 C 生成的 A 的子环，则 R 中的元素具有 $\begin{pmatrix}a+f_1 & f_2 & 0\\ f_3 & a+f_4 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ 的形式，其中 $a\in F$，$f_i\in tF[[t]], i=1,2,3,4$，且 $J(R)=tR$。如果

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\begin{pmatrix}a+f_{1i} & f_{2i} & 0\\ f_{3i} & a+f_{4i} & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}x^i,$$

$$g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\begin{pmatrix}a+f_{1j} & f_{2j} & 0\\ f_{3j} & a+f_{4j} & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}x^j\in R[[x]]$$

且满足 $f(x)g(x)=0$，则

$$\begin{pmatrix}a+f_{1i} & f_{2i} & 0\\ f_{3i} & a+f_{4i} & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+f_{1j} & f_{2j} & 0\\ f_{3j} & a+f_{4j} & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\in tR$$

因此环 R 是幂级数 J-Armendariz 环。但对于环 R 上的两个多项式，有 $f(x)g(x)=0$，而 $te_{11}t(e_{21}+e_{22})\notin \mathrm{nil}(R)$，因此环 R 不是幂级数弱 Armendariz 环。

这样我们就知道，幂级数 Armendariz 环 $\Rightarrow$ 幂级数弱 Armendariz 环；幂级数 Armendariz 环 $\Rightarrow$ 幂级数 J-Armendariz 环，但反之都不成立。对于 NI 环，有幂级数弱 Armendariz 环 $\Rightarrow$ 幂级数 J-Armendariz 环。

2　幂级数 J-Armendariz 环的扩张

给定两个环 R，S 和一个双模 ${}_RM_S$，令

$$T=\begin{pmatrix}R & M\\ 0 & S\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\middle| r\in R, m\in M, s\in S\right\}$$

在 T 上定义普通的加法和乘法：$\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r' & m'\\ 0 & s'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rr' & rm'+ms'\\ 0 & ss'\end{pmatrix}$，则 T 构成一个环，T 为形式三角矩阵环。

命题 2　设 R，S 是两个环，M 是一个 (R,S)-双模，$T=\begin{pmatrix}R & M\\ 0 & S\end{pmatrix}$ 是一个形式三角矩阵环，则 T 是幂级数 J-Armendariz 环当且仅当 R，S 都是是幂级数 J-Armendariz 环。

证明　充分性。设 $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\begin{pmatrix}r_i & m_i\\ 0 & s_i\end{pmatrix}x^i$，且满足 $f(x)g(x)=0$。令

$$f_r(x)=\sum_{i=0}^{\infty}r_ix^i, g_r(x)=\sum_{i=0}^{\infty}r'_jx^g\in R[[x]];$$

$$f_s(x)=\sum_{i=0}^{\infty}s_ix^i,g_s(x)=\sum_{i=0}^{\infty}s'_jx^g\in S[[x]]$$

于是由 $f(x)g(x)=0$ 知 $f_r(x)g_r(x)=0$，$f_s(x)g_s(x)=0$。因为 R,S 是幂级数 J-Armendariz 环，所以 $r_ir'_j\in J(R)$，$s_is'_j\in J(R)$。根据文献［9］的推论 2.3，$J(T)=\begin{pmatrix}J(R)&M\\0&J(S)\end{pmatrix}$，从而有 $\begin{pmatrix}r_i&m_i\\0&s_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r'_j&m'_j\\0&s'_j\end{pmatrix}\in J(R)$，对任意的 i,j，因此 T 是幂级数 J-Armendariz 环。

必要性。设 $f_r(x)=\sum_{i=0}^{\infty}r_ix^i$，$g_r(x)=\sum_{j=0}^{\infty}r'_jx^j\in R[[x]]$，满足 $f_r(x)g_r(x)=0$；还有 $f_s(x)=\sum_{i=0}^{\infty}s_ix^i$，$g_s(x)=\sum_{j=0}^{\infty}s'_jx^g\in S[[x]]$，满足 $f_s(x)g_s(x)=0$。现在令

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\begin{pmatrix}r_i&0\\0&s_i\end{pmatrix}x^i,$$

$$g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\begin{pmatrix}r_j&0\\0&s_j\end{pmatrix}x^j\in T[[x]]$$

于是由 $f_r(x)g_r(x)=0$，$f_s(x)g_s(x)=0$ 知 $f(x)g(x)=0$。根据已知 T 是幂级数 J-Armendariz 环，有 $\begin{pmatrix}r_i&0\\0&s_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r'_j&0\\0&s'_j\end{pmatrix}\in J(T)=\begin{pmatrix}J(R)&M\\0&J(S)\end{pmatrix}$。因此，对任意的 i,j，有 $r_ir'_j\in J(R)$，$s_is'_j\in J(S)$。这推出 R,S 都是幂级数 J-Armendariz 环。

推论 1 设 $T_n(R)$ 是 n 阶上三角矩阵环，则 $T_n(R)$ 是幂级数 J-Armendariz 环当且仅当 R 是幂级数 J-Armendariz 环。

据命题 2，自然问：环 R 上的 n 阶全矩阵环 $M_n(R)$ 是否也是幂级数 J-Armendariz 环，其中 $n\geq 2$。下面的例子给出了否定回答。

例 2 设 F 是一个域且 $R=M_2(F)$。取

$$f(x)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}x,$$

$$g(x)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}x\in R[x]\subseteq R[[x]]$$

则有 $f(x)g(x)=0$，但是 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\notin J(R)$，故 R 不是幂级数 J-Armendariz 环。

命题 3 设 R 是一个环，I 是环 R 的一个理想且 $I\subseteq J(R)$。如果 R/I 是幂级数 J-Armendariz 环，则 R 是幂级数 J-Armendariz 环。

证明 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$，$g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in R[[x]]$，且满足 $f(x)g(x)=0$。令 $\bar{R}=R/I$，在 $\bar{R}[[x]]$ 中有 $f(\bar{x})g(\bar{x})=(\sum_{i=0}^{\infty}\bar{a}_ix^i)(\sum_{j=0}^{\infty}\bar{b}_jx^j)=0$。由于 $\bar{R}$ 是幂级数 J－Armendariz 环，从而对任意的 i,j，有 $\bar{a}_i\bar{b}_j\in J(\bar{R})$，即

$$\bar{a}_i\bar{b}_j=(a_i+I)(b_j+I)\in(a_ib_j)+I=J(R/I)$$

这推出 $1-\bar{a}_i\bar{b}_j\in U(R/I)$，即存在 $c\in R$ 使得 $1-(1-a_ib_j)c\in I$。因为 I 是环 R 的一个理想且 $I\subseteq J(R)$，所以有 $(1-a_ib_j)c\in U(R)$，从而有 $1-a_ib_j\in U(R)$，$a_ib_j\in J(R)$，对任意的 i,j。故环 R 是幂级数 J-Armendariz 环。

称一个环 R 为局部环，如果 $R/J(R)$ 是除环。

推论 2 如果 R 是一个局部环，则环 R 是幂级数 J-Armendariz 环。

证明 因为 R 是局部环，$R/J(R)$ 是除环，而已知约化环是幂级数 Armendariz 环，所以 $R/J(R)$ 是幂级数 J-Armendariz 环。由命题 3 知结论成立。

但是，当 R 是一个局部环时，R 未必是幂级数弱 Armendariz 环。

例 3[3] 设 F 是一个域，$R=M_2(F)$ 且 $R_1=R[[t]]$。

$$S=\left\{\sum_{i=0}^{\infty}a_it^i\in R_1\,|\,a_0\in kI,k\in F\right\}$$

其中 I 是 F 的单位矩阵。显然 S 是局部环，由推论 2 知，环 S 是幂级数 J-Armendariz 环。但是取

$$f(x)=e_{11}t+e_{12}tx,\ g(x)=e_{21}t+e_{11}tx\in S[x]$$

有 $f(x)g(x)=0$，由于 $(e_{11}t)^2\notin \mathrm{nil}(S)$，故环 R 不是幂级数弱 Armendariz 环。

定理 1 设 $\{R_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 是一族环，则直积 $R=\prod_{\alpha\in\Lambda}R_\alpha$ 是幂级数 J-Armendariz 环当且仅当每一个环 R_α 都是幂级数 J-Armendariz 环。

证明 必要性。设

$$f_\alpha(x)=a_{0\alpha}+a_{1\alpha}x+\cdots+a_{p\alpha}x^p+\cdots,$$

$$g_\alpha(x)=b_{0\alpha}+b_{1\alpha}x+\cdots+b_{q\alpha}x^q+\cdots$$

满足 $f_\alpha(x)g_\alpha(x)=0$。取

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i,$$

$$g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in R[[x]]$$

其中 $a_i=(0,\cdots,0,a_{i\alpha},0,\cdots)$，$b_j=(0,\cdots,0,b_{j\alpha},0,\cdots)\in\prod_{\alpha\in\Lambda}R_\alpha$。由于 $f_\alpha(x)g_\alpha(x)=0$，故有 $f(x)g(x)=0$。因为 $R=\prod_{\alpha\in\Lambda}R_\alpha$ 是幂级数 J-Armendariz 环，所

以 $a_ib_j \in J(R)$。熟知，$J(R) = J(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Lambda} J(R_\alpha)$，从而对任意的 i,j，有 $a_{i\alpha}b_{j\alpha} \in J(R_\alpha)$。因此环 R_α 是幂级数 J-Armendariz 环。

充分性。设每一个 R_α 是幂级数 J-Armendariz 环，

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i, g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_jx^j \in R[[x]]$$

且满足 $f(x)g(x) = 0$，其中 $a_i = (a_{i\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$，$b_j = (b_{j\alpha})_{\alpha\in\Lambda} \in R$，$i,j \geqslant 0$。对任意的 $\alpha \in \Lambda$，取

$$f_\alpha(x) = a_{0\alpha} + a_{1\alpha}x + \cdots + a_{p\alpha}x^p + \cdots,$$

$$g_\alpha(x) = b_{0\alpha} + b_{1\alpha}x + \cdots + b_{q\alpha}x^q + \cdots$$

则有 $f_\alpha(x)g_\alpha(x) = 0$。因为每一个 R_α 都是幂级数 J-Armendariz 环，所以有 $a_{i\alpha}b_{j\alpha} \in J(R_\alpha)$，对任意的 $\alpha \in \Lambda$ 和任意的 i,j。再由 $\prod_{\alpha\in\Lambda} J(R_\alpha) = J(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha)$ 知 $a_ib_j \in J(R)$。因此环 R 是幂级数 J-Armendariz 环。

推论 3

(i) 环直和 $R = \oplus_{\alpha\in\Omega} R_\alpha$ 是幂级数 J-Armendariz 环当且仅当每一个 R_α 是幂级数 J-Armendariz 环；

(ii) 设 R 是一个环，$e \in R$ 是中心幂等元，则 R 是幂级数 J-Armendariz 环当且仅当 eR 和 $(1-e)R$ 都是幂级数 J-Armendariz 环。

证明　(i) 由每一个 R_α 是直和 $R = \oplus_{\alpha\in\Omega} R_\alpha$ 的理想以及命题 1 知必要性成立。反过来，据定理 1 知直积 $R = \prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 是幂级数 J-Armendariz，但直和 $R = \oplus_{\alpha\in\Omega} R_\alpha$ 是直积 $R = \prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ 的理想，再由命题 1 知充分性成立。

(ii) 因为 $e \in R$ 是中心幂等元，eR 和 $(1-e)R$ 都是 R 的理想，由 $R = eR \oplus (1-e)R$ 以及情形 (i) 即知。

称一个环 R 是 Abel 环，如果环 R 中每一个幂等元都是中心的。由文献 [10] 的定理 3. 6 知，幂级数 Armendariz 环是 Abel 环。下面的例子说明幂级数 J-Armendariz 环未必是 Abel 环。

例 4　设 F 是一个域，从而是幂级数 J-Armendariz 环。由推论 1 知 $R = T_2(F)$ 也是幂级数 J-Armendariz 环。$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是环 R 的幂等元，但 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不是中心的，所以 R 不是 Abel 环。

命题 4　设 R 是幂级数 J-Armendariz 环，$e \in R$ 是任意幂等元，则 eRe 是幂级数 J-Armendariz 环。

证明　设 $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$，

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_jx^j \in (eRe)[[x]] \subseteq R[[x]]$$

且满足 $f(x)g(x) = 0$。因为环 R 是幂级数 J-Armendariz 环，所以 $a_ib_i \in J(R)$，对任意的 i，j。又因为 $a_ib_i \in eRe$，所以 $a_ib_i \in J(R) \cap eRe = J(eRe)$。因此环 eRe 是幂级数 J-Armendariz 环。

定理 2　如果环 R 是幂级数 J-Armendariz 环，满足 $J(R)[x] = J(R[x])$，则 $R[x]$ 是幂级数 J-Armendariz 环。

证明　设 $F(y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_iy^i$，$G(y) = \sum_{j=0}^{\infty} g_jy^j \in R[x][[y]]$，并且 $F(y)G(y) = 0$，其中

$$f_i(x) = \sum_{s=0}^{t} a_{is}x^s,$$

$$g_j(x) = \sum_{l=0}^{h} b_{jl}x^l \in R[x]$$

取 $k_n = \deg f_0 + \deg f_1 + \cdots + \deg f_n + \deg g_0 + \deg g_1 + \cdots + \deg g_n + 1$，并且 $y^n = x^{k_n}$，其中 $\deg(f)$ 表示多项式 f 的次数。于是有

$$U(x) = f_0 + f_1x^{k_1} + f_2x^{k_2} + \cdots + f_nx^{k_n} + \cdots \in R[[x]],$$

$$V(x) = g_0 + g_1x^{k_1} + g_2x^{k_2} + \cdots + g_nx^{k_n} + \cdots \in R[[x]]$$

即

$$\begin{aligned} U(x) = {} & a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \cdots + a_{0t}x^t + \\ & a_{10}x^{k_1} + a_{11}x^{k_1+1} + a_{12}x^{k_1+2} + \cdots + \\ & a_{1t}x^{k_1+t} + \cdots + \\ & a_{n0}x^{k_n} + a_{n1}x^{k_n+1} + a_{n2}x^{k_n+2} + \cdots + \\ & a_{nt}x^{k_n+t} + \cdots \in R[[x]], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) = {} & b_{00} + b_{01}x + b_{02}x^2 + \cdots + b_{0h}x^h + \\ & b_{10}x^{k_1} + b_{11}x^{k_1+1} + b_{12}x^{k_1+2} + \cdots + b_{1h}x^{k_1+h} + \cdots + \\ & b_{no}x^{k_n} + b_{n1}x^{k_n+1} + b_{n2}x^{k_n+2} + \cdots + \\ & b_{nh}x^{k_n+h} + \cdots \in R[[x]] \end{aligned}$$

由 k_n 的取法知，这样构造的 $U(x)$ 是包含所有 f_i 系数的幂级数，$V(x)$ 是包含所有 g_j 系数的幂级数。由 $F(y)G(y) = 0$ 得 $U(x)V(x) = 0$。因为环 R 是幂级数 J-Armendariz 环，所以有 $a_{is}b_{jl} \in J(R)$，对任意的 i,s,j,l。于是有 $f_i(x)g_j(x) \in J(R)[x]$，对任意的 i,j。已知 $J(R[x]) = J(R)[x]$，从而有 $f_i(x)g_j(x) \in J(R[x])$，对任意的 i,j。因此知 $R[x]$ 是幂级数 J-Armendariz 环。

称环 R 的一个元素 μ 是右正则的，如果对任意的 $r \in R$，由 $\mu r = 0$ 可以推出 $r = 0$。类似地，可定义左正则元。如果 μ 既是左正则元又是右正则元，则称 μ 是正则元。

定理 3 设 Δ 是有限环 R 中的由中心正则元构成的乘法封闭子集，如果 R 是幂级数 J-Armendariz 环，则 $\Delta^{-1}R$ 是幂级数 J-Armendariz 环。

证明 因为 R 是有限环，Δ 是一个左 Ore 集合，所以对任何 $F(x), G(x) \in (\Delta^{-1}R)[[x]]$，有

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (u^{-1}\alpha_i) x^i,$$

$$G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (v^{-1}\beta_j) x^j$$

其中 u, v 是中心正则元，$a_i, b_j \in R$，对任意的 i, j。如果 $F(x)G(x) = 0$，取

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in R[[x]]$$

则由

$$0 = F(x)G(x) =$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (u^{-1}a_i v^{-1} b_j) x^{i+j} =$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (u^{-1}v^{-1}a_i b_j) x^{i+j} =$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (uv)^{-1}(a_i b_j) x^{i+j} =$$
$$(uv)^{-k} f(x) g(x)$$

得到 $f(x)g(x) = 0$。因为 R 是幂级数 J-Armendariz 环，所以有 $a_i b_j \in J(R)$，对任意的 i, j，从而有 $\alpha_i\beta_j = (uv)^{-1}a_i b_j \in J(\Delta^{-1}R)$。因此 $\Delta^{-1}R$ 是幂级数 J-Armendariz 环。

推论 4 如果环 R 是有限环，则 $R[x]$ 是幂级数 J-Armendariz 环当且仅当 $R[x;x^{-1}]$ 是幂级数 J-Armendariz 环。

证明 令 $\Delta = \{1, x, x^2, \cdots\}$，则 Δ 是环 $R[x]$ 中的乘法封闭左 Ore 子集。因为 $R[x;x^{-1}] = \Delta^{-1}R[x]$，所以根据定理 3 知结论成立。

参考文献：

[1] KIM N K, LEE K H, LEE Y. Power series rings satisfying a zero divisor property [J]. Comm Algebra, 2006, 34(6): 2205 -2218.

[2] HIZEM S. A note on nil power serieswise Armendariz rings [J]. Rend Circ Mat Palermo, 2010, 59(1): 87 -99.

[3] HUH C, KIM C O, KIM E J, et al. Nilradicals of power series rings and nil power series rings [J]. J Korean Math Soc, 2005, 42(5): 1003 -1015.

[4] HUH C, KIM H K, LEE D S, et al. Prime radicals of formal power series rings [J]. Bull Korean Math Soc, 2001, 38(4): 623 -633.

[5] NASR-ISFAHANI A, MOUSSAVI A. On skew power serieswise Armendariz rings [J]. Comm Algebra, 2011, 39(9): 3114 -3132.

[6] HONG C Y, KIM N K, KWAK T K. Nilradicals of skew power series rings [J]. Bull Korean Math Soc, 2004, 41(3): 507 -519.

[7] 普昭年. 斜 π -Armendariz 环[J]. 中山大学学报(自然科学版),2012, 51(3): 39 -43.
PU Z N. On skew π- Armendariz rings [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2012, 51(3): 39 -43.

[8] HWANG S U, JEON Y C, LEE Y. Structure and topological of NI rings [J]. J Algebra, 2006, 302(1): 186 -199.

[9] 王尧, 任艳丽. Morita Context 环的根[J]. 数学进展, 2016, 45(2): 195 -205.
WANG Y, REN Y L. Radicals of Morita Context rings [J]. Advances in Mathematics (China), 2016, 45(2): 195 -205.

[10] KWAK T K, LEE Y. On nilpotent power series with nilpotent coefficients [J]. Korean J Math, 2013, 21(1): 41 -53.